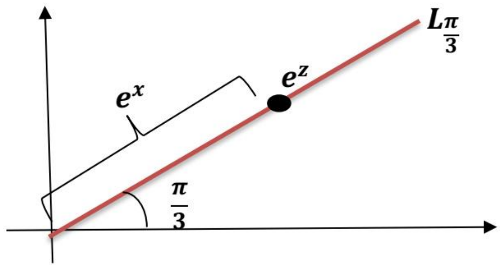
المحاضرة الرابعة

تمرين:

عين صورة المستقيم $D=\left\{z\in\mathbb{C} : x+\frac{\pi}{3}i \ : x\in\mathbb{R}\right\}$ وفق التابع الأسي العقدي.

الحل: لنأخذ $z\in D$، عندئذٍ فإنّ $arg(e^z)=\frac{\pi}{3}$ " إنّ القسم التخيلي للأس هو أحد قياسات زاوية الصورة e^z، وطويلته هي $|e^z|=e^x$". بالنتيجة تقع e^z على نصف المستقيم الذي بدايته مبدأ الإحداثيات ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ مع الاتجاه الموجب لمحور الفواصل ou (طبعا دون المبدأ) :



عندما تمسح x المجال $]-\infty,+\infty[$ فإنّ e^x ستمسح المجال $]0,+\infty[$، وبالتالي فإنّ العدد e^z سيمسح كامل نصف المستقيم $L_{\frac{\pi}{3}}$ الموضّح بالرسم أعلاه دون مبدأ الإحداثيات. أي أنّ صورة المجموعة D هي المستقيم $L_{\frac{\pi}{3}}$ بكامله دون المبدأ.

التوابع المثلثية العقدية:

تابع التجيب العقدي:

إنّ المتسلسلة العقدية $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$، هي متسلسلة قوى مركزها الصفر. لنوجد قرص تقاربها وذلك باستخدام معيار دالأمبير العام:

$$D=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}z^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^2}{(2n+2)(2n+1)}\right|=0 : \forall z\in\mathbb{C}$$

وبالتالي فإنّ المتسلسلة متقاربة بالإطلاق أياً كانت z من $\mathbb{C}$، أي أنّ منطقة التقارب هي كامل المستوي العقدي $\mathbb{C}$، وبالتالي تعرّف هذه المتسلسلة تابعاً على كامل $\mathbb{C}$، نرمز لهذا التابع بـ $\cos(z)$، ونُسمّيه تابع التجيب العقدي، أي أن $\cos z$ معرف على $\mathbb{C}$:

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

وهو تحليلي على كامل $\mathbb{C}$ لأنه تابع ممثل بمتسلسلة قوى.

تابع الجيب العقدي:

بخطوات مماثلة لتعريف $\mathbb{C}$، إنّ المتسلسلة العقدية $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\mathrm{n}}z^{2n}}{(2n)!}$ تعرّف تابعاً على $\mathbb{C}$،
نُسمّي هذا التابع تابع الجيب العقدي، ونرمزله بـ $\sin(z)$، أي أنّ هذا التابع معرف على $\mathbb{C}$ بـ :

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\mathrm{n}}z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

وهو تحليلي أيضاً على $\mathbb{C}$.

مشتق تابع التجيب العقدي:

حسب مبرهنة، مشتق التابع $\cos z$ ممثل بالمتسلسلة المشتقة لـ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\mathrm{n}}z^{2n}}{(2n)!}$ ، أي أنّه معرف على كامل المستوي العقدي بالمساواة:

$$(\cos z)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\mathrm{n}}z^{2n}}{(2n)!}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{\mathrm{n}}z^{2n}}{(2n)!}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\mathrm{n}}2n\,z^{2n-1}}{(2n)!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\mathrm{n}}\,z^{2n-1}}{(2n-1)!}\underset{n\leftrightarrow n+1}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\mathrm{n}+1}\,z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\mathrm{n}}\,z^{2n+1}}{(2n+1)!}=-\sin z$$

بشكلٍ مماثل، يمكن إثبات أنّ $(\sin z)'=\cos z$. "يترك للطالب"

تمرين: أثبت صحة المساواتين التاليتين:

$$\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\ ,\sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

المتطابقات المثلثية:

في الواقع، إنّ معظم المتطابقات المثلثية الحقيقية تبقى صحيحة في $\mathbb{C}$ ونذكر منها :

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1$$

$$\cos(z_1\pm z_2)=\cos(z_1)\cos(z_2)\pm\sin(z_1)\sin(z_2)$$

$$\sin(z_1\pm z_2)=\sin(z_1)\cos(z_2)\pm\cos(z_1)\sin(z_2)$$

$$\sin(2z)=2\sin(z)\cos(z)$$

$$\cos(2z)=\cos^2(z)-\sin^2(z)=2\cos^2(z)-1=1-2\sin^2(z)$$

يترك إثباتها للطالب.

تمرين:

أثبت أنّ كلاً من التابعين sin, cos دوريان، دور كل منهما يساوي 2π.

الحل: ينتج الإثبات من كون التابع الأسي العقدي دوري، ودوره $2\pi i$.

إيجاد الجزأين الحقيقي والتخيلي للتابع $\cos(z)$:

$$\cos(z) = \cos(x+iy) = \cos(x)\cos(iy) - \sin(x)\sin(iy)$$
$$= \cos(x)\frac{e^{i(iy)}+e^{-i(iy)}}{2} - \sin(x)\frac{e^{i(iy)}-e^{-i(iy)}}{2i}$$
$$= \cos(x)\frac{e^{-y}+e^{y}}{2} - \sin(x)\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}$$
$$= \cos(x)\frac{e^{-y}+e^{y}}{2} + i\sin(x)\frac{e^{-y}-e^{y}}{2}$$
$$= \cos(x)\, ch\,(y) - i\sin(x)\, sh(y)$$

وبالتالي فإنّ:

$$Re(\cos(z)) = u(x,y) = \cos(x)\, ch\,(y)$$
$$Im(\cos(z)) = v(x,y) = -\sin(x)\, sh\,(y)$$

- إثبات أن تابع التجيب تحليلي على $\mathbb{C}$ وتعيين مشتقه باستخدام شرطي كوشي-ريمان:
  نلاحظ أنّ كل من الجزأين الحقيقي والتخيلي قابل للاشتقاق التام على $\mathbb{R}^2$ ، ويحقّقان معادلتي كوشي-ريمان على $\mathbb{R}^2$ ، أي:

$$u_x(x,y) = -\sin x\;\; ch\, y = v_y(x,y)$$
$$u_y(x,y) = \cos x\;\; sh\, y = -v_x(x,y)$$

وبالتالي فهو تحليلي على $\mathbb{C}$. إن المشتق يعطى بالمساواة:

$$(\cos z)' = u_x + iv_x = -\sin x\;\; ch\, y - i\cos x\;\; sh\, y = \sin z$$

نتبّع نفس الأسلوب لدراسة التابع $\sin z$.

حل معادلة مثلثية:

المعادلة $\sin z = a$ حيث a ثابت عقدي:

$$\sin(z) = a \iff \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = a$$

$$\Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 2ia \Leftrightarrow e^{iz} - 2ia - e^{iz} = 0$$

بضرب الطرفين بـ e^{iz} نجد:

$$e^{2iz} - 2iae^{iz} - 1 = 0$$

لنضع $w = e^{iz}$، وبالتالي فإنّ المعادلة السابقة تصبح بالشكل:

$$w^2 - 2iaw - 1 = 0$$

ثمّ نحل المعادلة باستخدام المميز Δ، ونجد حلين w_1, w_2، وتُرد المسألة إلى حل المعادلتين الأسيتين التاليتين:

$$\begin{cases} w_1 = e^{iz} \\ w_2 = e^{iz} \end{cases}$$

وتكون مجموعة حلول المعادلة الأصلية هي اجتماع حلول المعادلتين الأسيتين السابقتين.

ملاحظات:

1) $e^z = e^{z_0} \Leftrightarrow z = z_0 + 2\pi ik$

2) $\sin z = \sin z_0 \Leftrightarrow z = z_0 + 2\pi k \ \vee \ z = \pi - z_0 + 2\pi k$

3) $\cos z = \cos z_0 \Leftrightarrow z = z_0 + 2\pi k \ \vee \ z = -z_0 + 2\pi k$

...انتهت المحاضرة الرابعة...